Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie SS 2007

Blatt 11 Abgabe bis Donnerstag 05.07.2007 um 14:00 Uhr

Aufgabe 38) Sei $K/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $\Gamma = Gal(K/\mathbb{Q})$. Für eine Primzahl p sei

$$Div_{K,p} = \bigoplus_{\mathfrak{p}\ Primideal\ in\ K\ mit\ p \in \mathfrak{p}} \mathbb{Z} \subset Div_K. \qquad \text{Zeige:}$$

(a) $H^1(\Gamma, Div_K) = \bigoplus_{p\ prim} H^1(\Gamma, Div_{K,p})$.

(b) $Div_{K,p} = Ind(\mathbb{Z})$ als Γ-Modul, wobei von einer Zerlegungsgruppe $G_{\mathfrak{p}}$ nach Γ induziert wird.

(c) Für jede endliche Gruppe G mit trivialer Operation auf $\mathbb{Z}$ gilt:

$$H^1(G, \mathbb{Z}) = Hom(G, \mathbb{Z}) = 0.$$

(d) Folgere aus dem Lemma von Shapiro: $H^1(\Gamma, Div_K) = 0$ (*Bemerkung ohne Beweis:* das Lemma von Shapiro gilt für beliebige Induktionen).

(4=1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 39) Sei $K/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $\Gamma = Gal(K/\mathbb{Q})$. Sei $P \subset Div_K$ die Untergruppe der Hauptdivisoren.

(a) Gib zwei kurze exakte Sequenzen von Γ-Moduln an, in denen $P, Div_K, Cl(K), \mathcal{O}_K^*$ und K^* vorkommen und zeige, dass man folgende exakte Sequenzen hat:

$$1 \to \{\pm 1\} \to \mathbb{Q}^* \to P^\Gamma \to H^1(\Gamma, \mathcal{O}_K^*) \to 1$$

$$1 \to P^\Gamma \to (Div_K)^\Gamma \to Cl(K)^\Gamma \to H^1(\Gamma, P) \to 1$$

(b) Zeige:

$$\#Cl(K)^\Gamma \quad = \quad \frac{\#H^1(\Gamma, P) \cdot [(Div_K)^\Gamma : div(\mathbb{Q}^*)]}{\#H^1(\Gamma, \mathcal{O}_K^*)}.$$

(c) Zeige: $(Div_K)^\Gamma / div(\mathbb{Q}^*) \;\cong\; \bigoplus_{p\ prim} \mathbb{Z}/e_p\mathbb{Z}$ mit den Verzweigungsindizes e_p.

(6=2+2+2 Punkte)

Aufgabe 40) Unter Fortführung der vorherigen Notationen sei jetzt Γ eine zyklische Gruppe.

(a) Zeige, dass man eine exakte Sequenz hat:

$$1 \;\rightarrow\; H^1(\Gamma, P) \rightarrow\; H^0(\Gamma, \mathcal{O}_K^*) \;\rightarrow\; H^0(\Gamma, K^*)$$

(b) Zeige, dass $H^1(\Gamma, P) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt, falls die Gleichung $-1 = N(\alpha)$ eine Lösung für $\alpha \in K$, aber keine Lösung mit $\alpha \in \mathcal{O}_K^*$ hat, und dass in allen anderen Fällen $H^1(\Gamma, P) = 0$ gilt.

(3=1+2 Punkte)

Aufgabe 41) Sei jetzt speziell $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit quadratfreiem $d \in \mathbb{Z}$. Sei $\sigma \in \Gamma = Gal(K/\mathbb{Q})$ das nicht-triviale Element.

(a) Zeige, dass $H^1(\Gamma, \mathcal{O}_K^*) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt, wenn entweder $d < 0$ ist oder wenn $d > 0$ ist, aber die Gleichung $-1 = \alpha \cdot \sigma(\alpha)$ eine Lösung mit $\alpha \in \mathcal{O}_K^*$ hat. Zeige, dass $H^1(\Gamma, \mathcal{O}_K^*) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ gilt, falls $d > 0$ ist und die Gleichung $-1 = \alpha \cdot \sigma(\alpha)$ keine Lösung mit $\alpha \in \mathcal{O}_K^*$ hat.

(b) Zeige, dass σ auf $Cl(K)$ durch $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^{-1}$ operiert und dass

$$Cl(K)^\Gamma \cong Cl(K)[2] = \{\mathfrak{a} \in Cl(K) | 2\mathfrak{a} = 0\} \qquad \text{gilt.}$$

(c) Wie kann man die Dimension des $\mathbb{F}_2$-Vektorraums $Cl(K)[2]$ aus dem Vorzeichen von d, der Anzahl v der verzweigten Stellen in $K/\mathbb{Q}$ und der Lösbarkeit der Gleichung $-1 = \alpha \cdot \sigma(\alpha)$ mit $\alpha \in K$ bestimmen?

(5= 2+1+2 Punkte)