

## Übungen zur Analysis I — Blatt 2

Prof. Dr. R. Weissauer  
Dr. K. Maurischat

Wintersemester 2015/16  
Abgabe: 30. Oktober 2015, 11.00 Uhr

---

**6. Aufgabe:** (4 Punkte) Zeigen Sie: In einem Körper mit genau drei verschiedenen Elementen  $0, 1$  und  $a$  sind Addition und Multiplikation eindeutig bestimmt. Geben Sie diese in Form von zwei Tabellen an.

**7. Aufgabe:** (4 Punkte) Es sei  $K$  ein Körper. Wir definieren auf dem kartesischen Produkt  $K \times K$  die Abbildungen „+“ und „ $\cdot$ “ durch

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba').$$

Mit diesen Definitionen erfüllt  $(K \times K, +, \cdot)$  alle Körperaxiome K1–K4, K1'–K5' und D, eventuell mit Ausnahme von K3'. Beweisen Sie dies für mindestens drei der Axiome.

**8. Aufgabe:** (4 Punkte) Es seien  $a_1, a_2, \dots, a_n$  Elemente eines Körpers  $K$ . Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Die Summe dieser  $n$  Zahlen  $a_k \in K$  hängt nicht von der Art der Klammerbildung und der Reihenfolge (Umordnung) ab.

**9. Aufgabe:** (4 Punkte) Zeigen Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

**10. Aufgabe:** (4 Punkte) Es sei  $(K, >)$  ein angeordneter Körper und es seien  $x, y, u, v \in K$ . Folgern Sie aus den Anordnungsaxiomen:

- (a)  $x < y \iff -y < -x$
- (b)  $x > y$  und  $u > v \implies x + u > y + v$
- (c)  $0 < x < y \implies y^{-1} < x^{-1}$
- (d) Sei  $x, y > 0$ , dann gilt:  $x < y \iff x^2 < y^2$ .

Gilt (c) und (d) auch im Fall  $x < 0$ ?

---

Die Übungsblätter zur Vorlesung Analysis I sind auch erhältlich unter  
[http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~kmaurisc/analysisI\\_WS15-16.htm](http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~kmaurisc/analysisI_WS15-16.htm)