Übungen zur Analysis II — Blatt 8

Prof. Dr. R. Weissauer — Sommersemester 2016
Dr. K. Maurischat — Abgabe: 17. Juni 2016, 11.00 Uhr

---

29. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion. Zeigen Sie,

$$\phi(x) \; = \; \int_0^1 f(x,y)\; dy$$

ist eine unendlich oft differenzierbare Funktion, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

30. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit $a < 0 < b$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie,

(a) $|x|^\alpha$ ist genau dann Lebesgue integrierbar auf $[a,b]$, wenn $\alpha > -1$.
[Hinweis: Betrachten Sie $f_n = \min(f, n \cdot \chi_{[a,b]})$.]

(b) $|x|^\alpha$ ist genau dann Lebesgue integrierbar auf $[1,\infty)$, wenn $\alpha < -1$.
[Hinweis: Betrachten Sie $f_n = f \cdot \chi_{[1,n]}$.]

31. Aufgabe: (4 Punkte) Zeigen Sie,

(a) es gibt eine von $n \in \mathbb{N}_{>0}$ unabhängige Konstante $c > 0$ so, dass

$$\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \frac{\sin x}{x}\; dx \le c \cdot \frac{1}{n^2}\,.$$

(b) Der Limes

$$\lim_{N\to\infty} \int_{2\pi}^{2\pi N} \frac{\sin x}{x}\; dx \; < \; \infty$$

existiert.

(c) Die Funktion $\chi_{[2\pi,\infty)}(x)\frac{\sin x}{x}$ gehört nicht zu $L(\mathbb{R})$.
[Hinweis: Benützen Sie die Verbandseigenschaft von $L(\mathbb{R})$.]

32. Aufgabe: (4 Punkte) Wir erinnern, $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{x^2}{n})^n \nearrow e^{-x^2}$.

(a) Zeigen Sie, $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{x^2}{n})^n\; dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\; dx$.
[Hinweis: Benützen Sie $f_n(x) = (1-\frac{x^2}{n})^n \chi_{[0,\sqrt{n}]}$.]

(b) Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $I_r := \int_0^1 (1-x^2)^r\; dx$. Zeigen Sie mittels partieller Integration für $r > 1$ die Rekursionsformel $I_r = \frac{2r}{2r+1} I_{r-1}$.

(c) Zeigen Sie

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\; dx \; = \; \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$$

und

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\; dx \; = \; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}}\,.$$

Die Übungsblätter zur Vorlesung Analysis II sind auch erhältlich unter
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~kmaurisc/analysisII_SoSe16.htm