Übungen zur Analysis II — Blatt 5

Prof. Dr. R. Weissauer
Dr. K. Maurischat

Sommersemester 2016
Abgabe: 27. Mai 2016, 11.00 Uhr

Begründen bzw. beweisen Sie Ihre Antworten!

17. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $N = \{1, \ldots, n\}$ und es sei

$$\sigma_n(x) \;=\; \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \cdot dx_{N \setminus \{i\}} \;\in\; A^{n-1}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Zeigen Sie,

(a) $d\sigma_n \;=\; n \cdot dx_N\,.$

(b) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $r = \|x\|$. Dann ist $r^\alpha \sigma_n \in A^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ geschlossen genau dann, wenn $\alpha = -n$.

18. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $r = \|(x, y)\|$ und es sei $\omega \in A^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ definiert als

$$\omega \;=\; r^{-2}\sigma_2 \;=\; \frac{x\,dy - y\,dx}{r^2}\,.$$

(a) Berechnen Sie den Pullback $\varphi^*(\omega)$ von ω unter der Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$.

(b) Zeigen Sie, ω ist zwar eine geschlossene Form, aber nicht exakt. Führen Sie dazu den Ansatz $\varphi^*(\omega) = \varphi^*(d\eta)$ mit $\eta \in A^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ zum Widerspruch.

Wir erinnern an Aufgabe 14 und 15!

19. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$ die Kreislinie um den Ursprung im $\mathbb{R}^2$ mit Radius $R > 0$. Berechnen Sie

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{x\,dy - y\,dx}{r^2}\,,$$

wobei $\mathcal{C}$ im mathematisch positiven Sinn durchlaufen werde.

20. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$ die Kreisscheibe um den Ursprung im $\mathbb{R}^2$ mit Radius $R > 0$. Berechnen Sie

$$\int \chi_K(x, y)\, dx \wedge dy\,.$$

Die Übungsblätter zur Vorlesung Analysis II sind auch erhältlich unter
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~kmaurisc/analysisII_SoSe16.htm