Übungen zur Analysis II — Blatt 3

Prof. Dr. R. Weissauer
Dr. K. Maurischat

Sommersemester 2016
Abgabe: 13. Mai 2016, 11.00 Uhr

Begründen bzw. beweisen Sie Ihre Antworten!

9. Aufgabe: (1+3=4 Punkte) Es sei $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$.

(a) Zeigen Sie
$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{f'(0)}{1}\,.$$

(b) Es sei auch $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $g(0) = 0$. Zusätzlich sei $g'(0) \neq 0$. Zeigen Sie
$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}\,.$$

10. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei U eine zulässige Teilmenge vom $\mathbb{R}^n$, und $I, J, K \subset \{1, \ldots, n\}$ seinen Indexmengen. Zeigen Sie die Assoziativität
$$(dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K)$$
des $\wedge$-Produktes auf $A^\bullet(U)$. [Tipp: Fußnote auf Seite 69 des Skripts.]

11. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei U eine zulässige Teilmenge vom $\mathbb{R}^n$, und es sei $\omega = \sum_{I,|I|=i} f_I dx_I \in A^i(U)$ eine i-Form auf U. Zeigen Sie
$$\omega \wedge \omega = 0\,,$$

(a) falls i ungerade ist.

(b) falls $i > \frac{n}{2}$.

Zeigen Sie weiter, für jedes gerade $i \leq \frac{n}{2}$ gibt es $\omega \in A^i(U)$ mit $\omega \wedge \omega \neq 0$.

12. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch
$$f(r, a, b) = (r \sin(a) \cos(b), r \sin(a) \sin(b), r \cos(a))\,.$$

Bestimmen Sie die Punkte, in denen f lokal umkehrbar ist. Bestimmen Sie in einer Umgebung von $f(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (0, 1, 0)$ die lokale Umkehrfunktion g.

Die Übungsblätter zur Vorlesung Analysis II sind auch erhältlich unter
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~kmaurisc/analysisII_SoSe16.htm