1 Einführung

Im Folgenden führen wir das für unser Studium relevante Objekt ein, nämlich den *Invariantenring*. Dazu sei $\mathcal{G}$ eine endliche Gruppe, $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Weiterhin sei

$$\varrho\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

ein Gruppenhomomorphismus und $\mathbb{K}[V]$ die Algebra von Polynomfunktionen von V. Via ϱ operiert $\mathcal{G}$ auf $\mathbb{K}[V]$: Zu $f \in \mathbb{K}[V]$, $v \in V$ und $g \in \mathcal{G}$ definieren wir $(g \cdot f)(v) \coloneqq f\left(\varrho(g^{-1})v\right)$. Der **Invariantenring** $\mathbb{K}[V]^{\mathcal{G}}$ ist nun definiert als Fixpunktmenge der Gruppenoperation auf $\mathbb{K}[V]$, also

$$\mathbb{K}[V]^{\mathcal{G}} \coloneqq \left\{f \in \mathbb{K}[V]\colon g \cdot f = f \;\forall\, g \in \mathcal{G}\right\}$$

Allgemeiner kann man Invariantenringe definieren, indem wir $\mathcal{G}$ als Automorphismus auf einer endlich erzeugten $\mathbb{K}$-Algebra $\mathcal{A}$ operieren lassen. Dann definieren wir

$$\mathcal{A}^{\mathcal{G}} \coloneqq \left\{a \in \mathcal{A}\colon g(a) = a \;\forall\, g \in \mathcal{G}\right\}$$

2 Hilbert'scher Basissatz

Definition 2.1 (Noether'sche Moduln)
Ein Modul $\mathcal{M}$ über einem kommutativen Ring $\mathcal{R}$ heißt **noether'sch**, falls jede aufsteigende Kette von Untermoduln von $\mathcal{M}$ stationär wird. $\mathcal{R}$ selbst heißt *noether'scher Ring*, falls er aufgefasst als Modul über sich selbst noether'sch ist.

Aufsteigend bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Kette durch echte Implikationen gegeben sein muss, also

$$\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \dots$$

Es fällt sofort auf, dass die direkte Summe zweier noether'schen Moduln, Quotientenmoduln und Untermoduln wieder noether'sch sind. Wir sammeln einige Eigenschaften von noether'schen Moduln und Ringen.

Lemma 2.2
Ein Modul $\mathcal{M}$ über einem noether'schen Ring $\mathcal{R}$ ist genau dann noether'sch, wenn er endlich erzeugt ist.

<u>**Beweis:**</u> Wir zeigen beiderseitige Implikation. Wir nehmen zuerst an, dass $\mathcal{M}$ noether'sch ist und wählen Elemente $x_1, x_2, \dots$ in $\mathcal{M}$, sodass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $x_i \notin \langle x_1, \dots, x_{i-1}\rangle$. Da $\mathcal{M}$ noether'sch ist, können wir nur endlich viele solcher Elemente auswählen (denn die daraus erzeugten Untermoduln bilden sicherlich eine aufsteigende Kette, die in $\mathcal{M}$ endet). Diese Elemente erzeugen nun $\mathcal{M}$, daher ist $\mathcal{M}$ endlich erzeugt.

Umgekehrt, sei $\mathcal{M}$ endlich erzeugt. Dann lässt sich $\mathcal{M}$ in eine endliche direkte Summe von Quotienten aus $\mathcal{R}$ darstellen. Da endliche, direkte Summen von noether'schen Ringen wieder noether'sch sind, ist $\mathcal{M}$ noether'sch. ∎

Korollar 2.3
Jeder Untermodul $\mathcal{N}$ eines noether'schen Moduls $\mathcal{M}$ über einem noether'schen Ring $\mathcal{R}$ ist endlich erzeugt.

Beweis: Folgt direkt aus Lemma 2.2.

Lemma 2.4
Ein kommutativer Ring $\mathcal{R}$ ist genau dann noether'sch, wenn jedes Ideal in $\mathcal{R}$ endlich erzeugt ist.

Beweis: Wir zeigen beiderseitige Implikation. Wir nehmen zuerst an, dass $\mathcal{R}$ noether'sch ist. Nach Korollar 2.3 ist jedes Ideal von $\mathcal{R}$ endlich erzeugt.

Umgekehrt, sei jedes Ideal von $\mathcal{R}$ endlich erzeugt und sei eine aufsteigende Kette von Idealen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ gegeben. Da die Kette aufsteigend ist, ist die Vereinigung all dieser Ideale $\mathfrak{A}$ wieder ein Ideal und nach Annahme endlich-erzeugt. Nun liegt jede endliche Teilmenge von $\mathfrak{A}$ in einer der $\mathfrak{A}_i$, insbesondere also auch die Erzeuger von $\mathfrak{A}$. Somit ist die Kette ab $\mathfrak{A}$ konstant und damit ist $\mathcal{R}$ noether'sch. ■

Satz 2.5 (Hilbert'scher Basissatz)
Sei $\mathcal{R}$ ein noether'scher Ring, dann ist auch der Polynomring $\mathcal{R}[T]$ ein noether'scher Ring.

Beweis: Wegen Lemma 2.4 reicht es zu zeigen, dass jedes Ideal $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{R}[T]$ endlich erzeugt ist. Sei nun also $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{R}[T]$ ein Ideal. Zu jedem Polynom in $\mathfrak{A}$ gibt es einen führenden Koeffizienten, welche wir in der Menge $\mathfrak{A}' \subseteq \mathcal{R}$ zusammenfassen. Da $\mathfrak{A}$ ein Ideal ist, ist $\mathfrak{A}'$ ebenfalls ein Ideal (in $\mathcal{R}$). Nach Voraussetzung ist $\mathcal{R}$ noether'sch und nach Lemma 2.4 ist $\mathfrak{A}'$ daher endlich erzeugt. Wir bezeichnen die Erzeuger mit $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{R}$. Nun wählen wir Polynome $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathfrak{A}$, sodass f_1 als führenden Koeffizienten a_1 hat, f_2 führenden Koeffizienten a_2 hat und so weiter und bezeichnen das von $f_1, \ldots, f_n$ erzeugte Ideal mit $\mathfrak{A}_0$. Weiterhin definieren wir $t := \max\big\{\deg(f_i)\big\}$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Sei nun $f \in \mathfrak{A}$ mit $\deg(f) > t$. Wir versuchen nun, den führenden Koeffizienten mit Polynomen in $\mathfrak{A}_0$ zu eliminieren. Sei a der führende Koeffizient von f, dann ist $a \in \mathfrak{A}'$. Deshalb finden wir ein Produkt von $f_1, \ldots, f_n$ mit einem Monom, sodass $f = g + h$, wobei $g \in \mathfrak{A}_0$, $h \in \mathfrak{A}$ und $\deg(h) < \deg(f)$. Induktiv erhalten wir, dass $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \big(\mathfrak{A} \cap (\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}T \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}T^{t-1})\big)$, was nun offensichtlich endlich-erzeugt ist. ■

An dieser Stelle möchte ich anmerken, dass man aus dem Hilbert'schen Basissatz induktiv folgern kann, dass der Polynomring in endlich vielen Variablen ebenfalls noether'sch ist.

Korollar 2.6
Sei $\mathcal{A}$ eine endlich-erzeugte, kommutative Algebra über einem Körper $\mathbb{K}$, dann ist $\mathcal{A}$ noether'sch.

Beweis: $\mathcal{A}$ ist nach dem Hauptsatz über endlich-erzeugte Moduln und Satz 2.5 eine direkte Summe von Quotienten von noether'schen Moduln und damit selbst noether'sch. ■

3 Endliche Erzeugbarkeit von Invariantenringen

Definition 3.1 (Ganzes Element)
Sei $\mathcal{R}$ ein Ring und $\mathcal{S}$ ein Unterring von $\mathcal{R}$. Ein Element $r \in \mathcal{R}$ heißt **ganz über** $\mathcal{S}$, falls es ein normiertes Polynom $\mathcal{P} \in \mathcal{S}[T]$ gibt, sodass $\mathcal{P}(r) = 0$. $\mathcal{R}$ heißt ganz über $\mathcal{S}$, falls alle Elemente von $\mathcal{R}$ ganz über $\mathcal{S}$ sind. Wir nennen $\mathcal{R}$ dann ein **ganze Erweiterung** von $\mathcal{S}$.

Satz 3.2 (Noether)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $\mathcal{G}$ eine endliche Gruppe, die als Automorphismus auf eine endlich-erzeugte $\mathbb{K}$-Algebra $\mathcal{A}$ operiert. Dann ist auch $\mathcal{A}^{\mathcal{G}}$ eine endlich-erzeugte $\mathbb{K}$-Algebra und $\mathcal{A}$ ist als Modul über $\mathcal{A}^{\mathcal{G}}$ endlich erzeugt.

Beweis: Sei $a \in \mathcal{A}$, dann ist a eine Nullstelle des Polynoms $\mathcal{P} \in \mathcal{A}^{\mathcal{G}}[T]$, wobei

$$\mathcal{P}(T) = \prod_{g \in \mathcal{G}} \big(T - g(a)\big)$$

denn die Koeffizienten sind Elementarsymmetrische Polynome (mit allen Elementen aus $\mathcal{G}$ angewendet auf a als Unbestimmte). Daher ist $\mathcal{A}$ eine ganze Erweiterung von $\mathcal{A}^{\mathcal{G}}$. Wir wählen nun die Unteralgebra $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}^{\mathcal{G}}$, welche durch die Koeffizienten von $\mathcal{P}$ gegeben sind, die wir durch die Erzeuger von $\mathcal{A}$ erhalten. Dann ist auch $\mathcal{B}$ eine endlich-erzeugte $\mathbb{K}$-Algebra und somit noether'sch. Nun ist $\mathcal{A}$ ein endlich-erzeugter $\mathcal{B}$-Modul und nach Korollar 2.3 somit auch $\mathcal{A}^{\mathcal{G}}$. Wir folgern, dass $\mathcal{A}^{\mathcal{G}}$ also eine endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Algebra ist. ∎

Korollar 3.3
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{G}$ eine endliche Gruppe, die als Automorphismus auf V wirkt. Dann ist $\mathbb{K}[V]^{\mathcal{G}}$ eine endlich-erzeugte $\mathbb{K}$-Algebra und $\mathbb{K}[V]$ ist eine endliche, ganze Erweiterung von $\mathbb{K}[V]^{\mathcal{G}}$.