Analysis I+II, SS 98 – WS 1998/99

Dr. Rolf Busam

Test- und Wiederholungsfragen

Die Fragen sollen Ihnen die Wiederholung des Stoffes erleichtern, zur Selbstkontrolle, zur Vorbereitung auf die Klausuren und zu Prüfungsvorbereitungen dienen. Beachten Sie, daß die Reihenfolge der Fragen nicht in allen Fällen dem Gang der Vorlesung entspricht.

1 Axiomatische Einführung der reellen Zahlen

1. Was bedeutet es, daß die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen einen Körper bildet?
2. Nennen Sie noch einige (mindestens 3) vom Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen verschiedene Körper.
3. Die Rechenregeln ($x, y \in \mathbb{R}$) $0 \cdot x = 0$, $(-1)(-1) = 1$ und $xy = 0 \iff x = 0$ oder $y = 0$ (*Nullteilerfreiheit*) sollten Sie ohne Probleme nachweisen können.
4. Was wissen Sie über die Elementanzahl eines *endlichen* Körpers? Gibt es einen Körper mit 4, 65536 oder 65537 Elementen? Welches ist der einfachste Körper, den man sich vorstellen kann?
5. Was bedeutet es, daß $\mathbb{R}$ ein *angeordneter* Körper ist?
6. Gibt es außer $\mathbb{R}$ auch andere angeordnete Körper? Nennen Sie Beispiele.
7. Die Rechenregeln für angeordnete Körper sollten Ihnen geläufig sein.
8. Warum läßt sich ein *endlicher* Körper nicht anordnen?
9. Wie ist der *Betrag* einer reellen Zahl definiert? Welche (Haupt-)Eigenschaften hat er?
10. Wie lautet die *Dreiecksungleichung* für reelle Zahlen?
11. Wie lautet die Dreiecksungleichung für Abschätzungen nach unten?
12. Erklären Sie, warum die Zuordnung $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(a, b) = |a - b|$ die folgenden Eigenschaften hat:

    $M_1 :\ d(x, y) \geq 0$ und $(d(x, y) = 0 \iff x = y)$
    $M_2 :\ d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$
    $M_3 :\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$. (Dreiecksungleichung)
13. Was ist ein *metrischer Raum*? Warum ist $\mathbb{R}$ mit $d(a, b) = |a - b|$ ein metrischer Raum? Kennen Sie weitere metrische Räume?
14. Was besagt das *Vollständigkeitsaxiom* für $\mathbb{R}$?
15. Wie sind $\sup M$ und $\inf M$ für eine beschränkte Teilmenge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ definiert?
16. Wie lautet die *ε-Charakterisierung* von $\sup M$ und $\inf M$?
17. Zeigen Sie: $\inf\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} = 0$
18. Was ist der Unterschied zwischen $\sup M$ und $\max M$?

19. Welche *Intervalltypen* sind Ihnen bekannt? Wie lassen sich Intervalle charakterisieren? Wann ist die Länge eines Intervalls definiert?

20. Im folgenden sind Eigenschaften zusammengestellt, die alle zum *Vollständigkeitsaxiom* (=*Supremumsaxiom*) der reellen Zahlen äquivalent sind:

    (a) *Vollständigkeitsaxiom*: Jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke (Supremum).

    (b) *Schnittaxiom*: Sind A, B zwei nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

        i. $A \cup B = \mathbb{R}$

        ii. Für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ ist stets $a \leq b$.

        Dann gibt es ein (eindeutig bestimmtes) $c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$. (Bem.: Man nennt dann das Paar (A, B) einen *Dedekindschen Schnitt* und c *Schnittzahl.*)

    (c) Jede monoton wachsende nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen ist konvergent.

    (d) Es gilt das *Intervallschachtelungsprinzip* und die *Archimedische Eigenschaft*, d.h. die Folge (n) der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt.

    (e) Jede Cauchy-Folge konvergiert und es gilt die Archimedische Eigenschaft.

    Versuchen Sie, die Äquivalenz durch einen Ringbeweis zu zeigen.

2 Natürliche Zahlen (vollständige Induktion), ganze Zahlen, rationale Zahlen

21. Was ist eine *induktive Teilmenge* von $\mathbb{R}$ (Zählmenge, Nachfolgermenge)?

22. Wie ist die Menge $\mathbb{N}$ der *natürlichen Zahlen* als Teilmenge von $\mathbb{R}$ charakterisiert?

23. Warum ist eine Teilmenge $W \subset \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften

    (a) $1 \in W$

    (b) Für alle $w \in W$ gilt $w + 1 \in W$.

    stets mit $\mathbb{N}$ identisch?

24. Warum gibt es keine natürliche Zahl n mit $1 < n < 2$?

25. Was besagt das Beweisprinzip der *vollständigen Induktion?*

26. Können Sie auf Anhieb die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

    beweisen?

27. Welche Varianten des Beweisprinzips der vollständigen Induktion sind Ihnen bekannt? Wie kann man Sie auf das ursprüngliche Prinzip zurückführen?

28. Wie sind die Zahlen C_k^n des *Pascalschen Dreiecks* definiert?

29. Wie lautet die *binomische Formel* (der *binomische Satz*)?

30. Wie sind die *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$ definiert? Warum stimmen Sie mit den Pascalzahlen C_k^n überein?

31. Welche kombinatorische Bedeutung hat der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$?

32. Die folgenden Formeln sollten Sie kennen, beweisen und anwenden können:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (0 \le k \le n)$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad (1 \le k \le n)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{(Kombinatorische Deutung?)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

33. Zeigen Sie: Die Anzahl der injektiven Abbildungen von $\{1, \ldots, k\}$ in $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist $P(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1) = k!\binom{n}{k}$. ($P(n,k)$ ist die Anzahl der *geordneten* Stichproben aus $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ vom Umfang k *ohne* Wiederholung)

34. Zeigen Sie: Die Anzahl der *geordneten* Stichproben aus $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ vom Umfang k *mit* Wiederholungen ist $W(n,k) = n^k$.

35. Zeigen Sie: Die Anzahl der *ungeordneten* Stichproben aus $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ *ohne* Wiederholung ist $\binom{n}{k}$

36. Was besagt der *Wohlordnungssatz* für die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen? Inwiefern ist er zum Beweisprinzip der vollständigen Induktion äquivalent?

37. Nennen Sie ein Beispiel für die Anwendung des Wohlordnungssatzes.

38. Was bedeutet: Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist *archimedisch* geordnet?

39. Können Sie beweisen, daß es zu jeder reellen Zahl x eine natürliche Zahl n mit $n > x$ gibt?

40. Kennen Sie ein Beispiel für einen Körper K, der zwar angeordnet ist, aber nicht archimedisch angeordnet ist?

41. Wie sind die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als Teilmengen von $\mathbb{R}$ definiert?

42. Welche algebraische Struktur besitzen $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}$?

43. Was besagt die Aussage „$\mathbb{Q}$ ist *dicht* in $\mathbb{R}$“? Können Sie das beweisen?

44. Warum liegen die irrationalen Zahlen $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$?

45. Können Sie zeigen, daß es keine rationale Zahl x gibt mit $x^3 = 2$? Gibt es ein reelles x mit dieser Eigenschaft?

3 Einige nützliche Ungleichungen

46. Beweisen Sie die Ungleichung für das arithmetische Mittel: Für $a < b$ gilt $a < \frac{a+b}{2} < b$.
47. Formulieren und beweisen Sie die Ungleichung zwischen *harmonischem*, *geometrischem*, *arithmetischem* und *quadratischem* Mittel zweier Zahlen. (vgl. Übungsblatt 1)
48. Formulieren und beweisen Sie die *Bernoullische Ungleichung.*
49. Beweisen Sie folgenden Spezialfall der *Youngschen* Ungleichung:

$$|ab| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$$

50. Formulieren und beweisen Sie die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

4 Konvergente Folgen (von reellen Zahlen)

Beachten Sie, daß vieles auch für Folgen von komplexen Zahlen gilt, vgl. Abschnitt 9.

51. Wann nennt man eine Folge (a_n) reeller Zahlen *konvergent*, wann *divergent?*
52. Was bedeutet die Aussage: „Die (reelle) Zahlenfolge (a_n) ist konvergent mit dem *Grenzwert* a $(a \in \mathbb{R})$"?
53. Was versteht man unter einer *ε-Umgebung* einer *reellen* Zahl a?
54. Was versteht man unter einer *ε-Umgebung* einer *komplexen* Zahl a?
55. Was bedeutet die Aussage: „*Fast alle* (oder schließlich alle) Folgenglieder der Folge (a_n) liegen in $U_\varepsilon(a)$"?
56. Wie kann man die Aussage: „Die Folge (a_n) konvergiert gegen a" mit Hilfe von ε-Umgebungen und dem Begriff *Fast alle* formulieren?
57. Daß eine Folge (a_n) *nicht* gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert bedeutet:
    - ☐ Es gibt eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$, so daß für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \notin U_\varepsilon(a)$.
    - ☐ Es gibt eine ε-Umgebung, so daß es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ gibt mit $a_n \notin U_\varepsilon(a)$.
    - ☐ Zu jedem N gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für ein $n > N$ gilt $a_n \notin U_\varepsilon(a)$.
58. Warum hat eine Folge (a_n) höchstens einen Grenzwert? Was besagt die *Hausdorffsche Trennungseigenschaft* für $\mathbb{R}$ (für $\mathbb{C}$) ?
59. Warum ist eine konvergente Folge *beschränkt?*
60. Was besagen die Rechenregeln für konvergente Folgen? Sie sollten diese Regeln beweisen können.
61. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Konvergenz einer Folge (a_n) gegen $a \in \mathbb{R}$ (bzw. $a \in \mathbb{C}$) und der Konvergenz der Folge $(a_k - a)$?
62. Was ist eine *Nullfolge?*
63. Folgt aus der Konvergenz von $(|a_n|)$ stets auch die Konvergenz von (a_n)? (Begründen Sie die Antwort durch ein (Gegen)Beispiel.) Unter welchen Zusatzvoraussetzungen ist das richtig?
64. Was versteht man unter einer *Teilfolge* einer Folge? Warum konvergiert jede Teilfolge einer konvergenten Folge gegen den Grenzwert der ganzen Folge?

65. Formulieren Sie ein *Divergenzkriterium* mittels Teilfolgen.

66. Formulieren und beweisen Sie das *Sandwich*-Theorem. Geben Sie ein Anwendungsbeispiel.

67. Was besagt der Satz über die *Monotonie des Grenzwerts*? Geben Sie ein Beispiel an für zwei Folgen (a_k) und (b_k), für die $a_k < b_k$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, aber dennoch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ gilt?

68. Was ist der Unterschied zwischen einer *Folge* und der *Menge ihrer Folgenglieder?*

69. Warum ändert sich das Konvergenzhalten und der Grenzwert einer Folge (a_n) nicht, wenn nur *endlich* viele Folgenglieder verändert werden?

70. *Wachstumsgeschwindigkeit*: Für zwei Folgen (a_n) und (b_n), die über jede Grenze wachsen, führen wir folgende Sprechweise ein: (b_n) wächst schneller (gegen unendlich) als (a_n), wenn $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ eine Nullfolge ist.

    Zeigen Sie, daß in der folgenden Liste jede Folge schneller (gegen unendlich) wächst als die vorangehende:

    $$(n^p) \text{ mit } p \in \mathbb{N}; \qquad (q^n) \text{ mit } q > 1; \qquad (n!); \qquad n^n; \qquad 2^{n^n}$$

71. Folgende Grenzwerte sollten Sie berechnen können:

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } |q| < 1, \\ 1, & \text{falls } q = 1. \end{cases}$
    Für $|q| > 1$ wächst $(|q^n|)$ über jede Grenze, für $q = -1$ ist die Folge (q^n) divergent.

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

    (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für jedes $a > 0$,

    (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

    (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ für jedes $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$,

    (f) $\lim\limits_{n\to\infty} n^p q^n = 0$, falls $|q| < 1$, $p \in \mathbb{N}$,

    (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$ für $a, b \geq 0$,

    (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$,

72. Für jedes $a > 0$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert die durch $x_0 = a + 1$ und $x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n^k + a}{kx_n^{k-1}}$ definierte Folge (x_n) monoton fallend gegen die eindeutig bestimmte Lösung $x > 0$ der Gleichung $x^k = a$. Erläutern Sie, wie man nach dem Vorbild der alten Babylonier im Fall $k = 2$ auf diese Rekursionsformel kommen kann. (Das *Newton*-Verfahren ist erst im Dunst zu sehen.) Berechnen Sie Näherungswerte für $\sqrt{2}$ und $\sqrt[3]{2}$ mit (absolutem) Fehler $\leq \frac{1}{2}10^{-6}$.

5 Konvergenzkriterien

73. Was besagt das *Monotonieprinzip*?

74. Können Sie beweisen, daß eine *monoton wachsende* nach oben *beschränkte* Folge (a_n) reeller Zahlen stets gegen $\sup\{a_1, a_2, \ldots\}$ konvergiert?

75. Was besagt das *Intervallschachtelungsprinzip?*

76. Erklären Sie es am Beispiel der Folgen:

(a) $a_n := e_n := (1+\frac{1}{n})^n, \quad b_n := e_n^\star := (1+\frac{1}{n})^(n+1)$

(b) $a_n := E_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad b_n := E_n^\star := E_n + \frac{1}{nn!}$

77. Sie sollten zeigen können, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $2 \leq e_n \leq E_n < 3$.

78. Zeigen Sie mit Hilfe *Sandwich*-Theorems:

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} E_n^\star = \lim_{n\to\infty} e_n^\star$$

79. Zeigen Sie für $n \geq 1$:

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{nn!} \qquad (1)$$

80. Folgern Sie aus (1), daß die *Eulersche Zahl* e irrational ist.

81. Was besagt das Prinzip von *Bolzano-Weierstraß* für Folgen? Können Sie das beweisen?

82. Was ist eine *Cauchy-Folge?*

83. Warum ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge?

84. Können Sie eine Cauchy-Folge von rationalen Zahlen angeben, deren Grenzwert keine rationale Zahl ist?

85. Was besagt das *Cauchysche Konvergenzkriterium?*

86. Zeigen Sie: Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

87. Zeigen Sie: Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge. (Den Grenzwert einer solchen Teilfolge nennt man *Häufungswert* der ursprünglichen Folge.)

88. Zeigen Sie: Konvergiert eine Teilfolge einer Cauchy-Folge gegen a, dann konvergiert auch die ganze Folge gegen a.

89. Folgern Sie aus den letzten 3 Aufgaben, daß jede reelle Cauchy-Folge gegen eine reelle Zahl konvergiert. Wo scheitert der Beweis, wenn *reell* jeweils durch *rational* ersetzt wird?

90. Nennen Sie zwei Beispiele für die Anwendung des Cauchy-Kriteriums.

91. Was versteht man unter dem *Häufungswert* einer Folge? Wie lassen sich Häufungswerte charakterisieren?

92. Warum hat eine beschränkte Folge stets einen *größten* und *kleinsten* Häufungswert ($\limsup$ und $\liminf$)? Wie lassen sich diese charakterisieren?

93. Die *Divergenz* einer reellen Folge (a_n) bedeutet:

    ☐ Die Beträge der Folgenglieder streben gegen unendlich.

    ☐ In jeder Umgebung $U_\varepsilon(a)$ ($a \in \mathbb{R}$ beliebig, $\varepsilon > 0$) liegen nur endlich viele Folgenglieder.

    ☐ Die Folge (a_n) ist keine Cauchy-Folge.

6 Reihen

94. Was versteht man unter der einer Folge (a_k) zugeordneten *Reihe*?

95. Welche Symbolik wird dabei verwendet?

96. Wann heißt eine Reihe $\sum(a_k)$ konvergent?

97. Warum ändert sich das Konvergenzverhalten einer Reihe nicht, wenn man endlich viele Glieder der Reihe abändert? Beachten Sie, daß sich dabei der Wert der Reihe sehr wohl ändern kann.

98. Welche Rechenregeln für (konvergente) Folgen lassen sich unmittelbar auf (konvergente) Reihen übertragen?

99. Erklären Sie, weshalb die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \sum: & \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \\ & (a_k) & \longmapsto & (s_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \end{array}$$

bijektiv ist (Tip: Teleskop-Trick).

100. Was ist der Unterschied zwischen einer *Reihe* und ihrem *Wert* (Grenzwert, Summe)? Bem.: In der Literatur wird jedoch häufig dasselbe Symbol verwendet!

101. Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist die geometrische Reihe $\sum q^k$ konvergent?

102. Zeigen Sie, daß für $|q| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

gilt.

103. Warum ist bei einer konvergenten Reihe $\sum(a_k)$ die Folge (a_k) stets eine Nullfolge?

104. Warum ist bei einer konvergenten Reihe $\sum(a_k)$ die Folge (r_n) der *Reihenreste* eine Nullfolge? (Die Folge (r_n) ist definiert durch die Gleichung $s_n + r_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$)

105. Was versteht man unter einer *teleskopischen Reihe*? Wie kann man deren Summe leicht berechnen?

106. Zeigen Sie, daß $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert, und daß $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ gilt. Folgern Sie daraus, daß auch $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

107. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4}$$

108. Zeigen Sie am Beispiel der *harmonischen Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, daß die Konvergenz von (a_k) gegen Null nur eine *notwendige* Bedingung ist, aber nicht *hinreichend* für die Konvergenz von $\sum a_k$.

109. Wie kann man das *Cauchy-Kriterium* für Reihen (um)formulieren?

110. Wann heißt eine Reihe $\sum a_k$ *absolut konvergent*?

111. Welche Konvergenzkriterien sind Ihnen bekannt? (Mindestens 4)

112. Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums, daß aus der *absoluten Konvergenz* einer Reihe stets die *Konvergenz* folgt. Kennen Sie (für Reihen mit reellen Summanden) einen anderen Beweis?

113. Was besagt das allgemeine *Vergleichskriterium* für Reihen (*Majoranten-*, *Minorantenkriterium*)?

114. Entscheiden Sie mit Majoranten- und Minorantenkriterium, welche der folgenden Reihen konvergieren:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \log(k)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+[k]}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[k]{k}}{k^2}$$

115. Beweisen Sie: Wenn $\sum a_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch $\sum a_k^n$ $(n \in \mathbb{N})$ absolut.

116. Was besagt das *Wurzelkriterium*? Wie lautet seine Limesform?

117. Was besagt das *Quotientenkriterium*? Wie lautet seine Limesform?

118. Entscheiden Sie mit Wurzel- und Quotientenkriterium, welche der folgenden Reihen konvergent sind:

$$\sum x^n n! \ (x \in \mathbb{C}); \qquad \sum x^n n^n \ (x \in \mathbb{C}); \qquad \sum \frac{n^n}{(n!)^2}$$

119. Wie lautet das *Leibniz-Kriterium* für *alternierende Reihen*? Geben Sie ein Anwendungsbeispiel.

120. Was besagt das *Verdichtungskriterium*? Wie kann man damit die Konvergenz bzw. Divergenz der Reihen $\sum \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, zeigen?

121. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ sei die Folge $(a_k x^k)$ eine Nullfolge. Warum ist dann die Reihe $\sum(a_k x^k)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent?

122. Wie ist die exp-*Funktion* definiert? Warum konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$? Nennen Sie einige Eigenschaften von exp. Durch welche Eigenschaften ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ charakterisiert?

123. Wie ist die *Gaußklammer* $[x]$ definiert?

124. Was versteht man unter der *g-al-Entwicklung* einer reellen Zahl $x \geq 0$? Ist sie eindeutig? Wie erhält man sie? Warum kann man sich auf x mit $0 \leq x \leq 1$ beschränken?

125. Wie kann man die rationalen Zahlen innerhalb der reellen Zahlen durch ihre g-al Entwicklung charakterisieren?

126. Warum bilden die absolut konvergenten Reihen einen Vektorraum?

7 Abbildungen, Abzählbarkeit

127. Was versteht man unter einer *Abbildung* f von einer Menge X in eine Menge Y?

128. Wie läßt sich der Begriff *Abbildung* mathematisch exakt definieren? (vgl. hierzu: *Mengen, Abbildungen und Beweise*, §1)

129. Was ist der *Definitionsbereich* einer Abbildung? Wie unterscheidet sich der Zielbereich Y von der (genauen) Wertemenge $W(f)$ von f?

130. Wann nennt man eine Abbildung $f : X \to Y$ *injektiv*, *surjektiv* oder *bijektiv*? Geben Sie jeweils Beispiele.

131. Was versteht man unter dem *Bild einer Teilmenge* $A \subset X$?

132. Wie ist für Funktionen $f : X \to Y$ das *Urbild* $f^{-1}(D)$ für $D \subset Y$ definiert?

133. Wie ist die *Umkehrabbildung* einer bijektiven Abbildung $f : X \to Y$ definiert? Warum ist sie wieder bijektiv? Wie läßt sie sich charakterisieren?

134. Beweisen Sie: Für $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ sind äquivalent:

    (a) f ist bijektiv.

    (b) f ist injektiv.

    (c) f ist surjektiv.

135. Was versteht man unter dem *cartesischen Produkt* $X \times Y$ zweier Mengen X und Y?

136. Beweisen Sie den *Hauptsatz*:

    (a) Sind X und Y höchstens abzählbare Mengen, dann ist auch das cartesische Produkt $X \times Y$ höchstens abzählbar.

    (b) Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge X_n höchstens abzählbar, dann ist auch $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ höchstens abzählbar.

137. Geben Sie nach Möglichkeit 2 verschiedene Beweise für die *Abzählbarkeit* von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

138. Erläutern Sie, warum $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ *abzählbar* sind.

139. Geben Sie ein Beispiel für eine *überabzählbare* Menge an.

140. Erläutern Sie, warum das Intervall $[0, 1[$ überabzählbar ist. Warum ist damit dann auch $[0, 1] = [0, 1[\cup \{1\}$ überabzählbar, und dann auch jedes kompakte Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ $(a < b)$?

141. Wann heißt eine reelle (oder komplexe) Zahl α *algebraisch*, wann *transzendent*?

142. Wie kann man aus der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen auf die Existenz von transzendenten Zahl schließen?

143. Nennen Sie Beispiele für transzendente Zahlen (ohne Beweis!).

144. Erklären Sie, warum die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(X) := \{Y;\ Y \subset X\}$ einer Menge gleichmächtig ist zur Menge $\mathrm{Abb}(X, \{0, 1\})$, und folgern Sie, daß X und $\mathcal{P}(X)$ nicht gleichmächtig sind.

8 Umordnungssätze für Reihen

145. Geben Sie ein Beispiel dafür an, daß man in einer konvergenten Reihe vorhandene Klammern nicht ohne weiteres weglassen darf.

146. Formulieren Sie ein *Assoziativgesetz* für konvergente Reihen

147. Geben Sie ein Beispiel für eine konvergente Reihe und eine ebenfalls konvergente Umordnung dieser Reihe an, wobei die Umordnung aber einen anderen Wert hat.

148. Was ist eine *bedingt konvergente* Reihe?

149. Was besagt der *Riemannsche Umordnungssatz*?

150. Was besagt der *kleine Umordnungssatz*? Können Sie ihn beweisen?

151. Was besagt der *große Umordnungssatz*? Inwiefern beinhaltet er ein allgemeines Distributivgesetz für (konvergente) Reihen?

152. Was besagt der *Doppelreihensatz*? Inwiefern ist er ein Spezialfall des großen Umordnungssatzes?

153. Wie folgt aus ihm der kleine Umordnungssatz?

154. Sind $\sum(a_k)_{k\geq 0}$ und $\sum(b_k)_{k\geq 0}$ absolut konvergente Reihen und ist $p_n = (p_0, p_1, \dots)$ irgendeine Anordnung der Produkte $a_k b_l$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, dann ist die Reihe $\sum p_n$ ebenfalls absolut konvergent, und es gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum\limits_{l=0}^{\infty} b_l$.

155. Was versteht man unter dem *Cauchy-Produkt* zweier Reihen $\sum(a_k)$ und $\sum(b_k)$?

156. Warum ist das Cauchy-Produkt von zwei absolut konvergenten Reihen wieder absolut konvergent?

157. Geben Sie ein Beispiel für zwei konvergente Reihen an, deren Cauchy-Produkt divergiert.

158. Zeigen Sie, daß für $|q| < 1$ gilt:

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)q^k$$

159. Beweisen Sie die *Funktionalgleichung* $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$ der Exponentialfunktion.

9 Komplexe Zahlen

160. Geben Sie (mindestens) 2 Motive zur Einführung der komplexen Zahlen an.

161. Geben Sie (mindestens) eine Konstruktion des Körpers $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen an.

162. Warum läßt sich der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen nicht anordnen?

163. Begründen Sie, warum die Abbildung $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = x + \mathrm{i}y \mapsto x - \mathrm{i}y$ ein involutorischer Automorphismus ist, der $\mathbb{R}$ elementweise fest läßt.

164. Weisen Sie die folgenden Eigenschaften des Betrags einer komplexen Zahl nach ($z, w \in \mathbb{C}$):

$$\begin{array}{ll} |z| = 0 \iff z = 0, & |zw| = |z|\,|w| \\ |z+w| \leq |z| + |w|\,, & ||z| - |w|| \leq |z \pm w| \end{array}$$

165. Was versteht man unter der ε-Umgebung einer komplexen Zahl a?

166. Begründen Sie, warum eine Folge (z_n) von komplexen Zahlen genau dann konvergiert, wenn die Folgen $(\mathrm{Re}(z_n))$ und $(\mathrm{Im}(z_n))$ konvergieren und warum gegebenenfalls gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

167. Warum ist in $\mathbb{C}$ jede Cauchy-Folge konvergent?

168. Welche Konvergenzkriterien für Reihen mit reellen Gliedern lassen sich sofort auf Reihen mit komplexwertigen Gliedern übertragen?

10 Stetigkeit, Grenzwerte

169. Können Sie nachweisen, daß der Begriff der Folgenstetigkeit zur ε-δ-Stetigkeit äquivalent ist?

170. Was bedeutet: „Stetigkeit (an einer Stelle) ist eine lokale Eigenschaft?

171. Was besagt der Zwischenwertsatz?

172. Was besagt der Umkehrsatz?

173. Warum hat eine stetige Abbildung $f : [0,1] \to [0,1]$ stets einen Fixpunkt?

174. Was besagt der Nullstellensatz von Bolzano?

175. Können Sie ihn anwenden, um die Existenz von n-ten Wurzeln aus $a \in \mathbb{R}_+$ zu zeigen?

176. Nennen Sie Haupteigenschaften von stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($[a,b]$ kompaktes Intervall).

177. Was gesagt der Nullstellensatz bzw. der Identitätssatz für Polynome?

178. Nennen Sie die Definition und die Haupteigenschaften des natürlichen Logarithmus.

179. Warum ist $\ln : \mathbb{R}_+^\bullet \to \mathbb{R}$ stetig?

180. Wie ist a^x definiert?

181. Warum hat jede von der Nullfunktion verschiedene stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $f(1) = a$ $(a > 0)$ die Gestalt $f(x) = a^x$?

182. Zwischen dem Logarithmus von $x \in \mathbb{R}_+$ zur Basis b (log) und dem natürlichen Logarithmus (ln) besteht die Beziehung
$$\log x = \frac{\ln x}{\ln b}.$$

11 Funktionenfolgen, Funktionenreihen, Potenzreihen, Winkelfunktionen

183. Was versteht man unter der Supremumsnorm einer beschränkten Funktion?

184. Was ist ein normierter Raum?

185. Weisen Sie die Normeigenschaften für die Supremumsnorm nach.

186. Eine Folge (f_n) von beschränkten Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn die Folge $\|f_n\|_\infty$ eine Cauchyfolge ist.

187. Warum besitzt eine (lokal) gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen eine stetige Grenzfunktion?

188. Worin besteht der Unterschied zwischen der punktweisen und der gleichmäßigen Konvergenz einer Funktionenfolge?

189. Was besagt der Weierstraßsche Majorantentest für Funktionenreihen?

190. Erläutern Sie den Begriff *Potenzreihe* und *Konvergenzradius* einer Potenzreihe.

191. Welche Formeln für den Konvergenzradius einer Potenzreihe sind Ihnen bekannt?

192. Was besagt das Abelsche Lemma (für die Konvergenz eine Potenzreihe)?

193. Wie ist die reelle bzw. komplexe Exponentialfunktion definiert?

194. Wie lautet die Definition von $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

195. Was besagt die Eulersche Formel für cos und sin?

196. Wie sind cos und sin im Komplexen definiert?

197. Wie lauten die Additionstheoreme der reellen Winkelfunktionen? Können Sie sie beweisen? Gelten sie auch im Komplexen?

198. Wie ist Zahl $\pi/2$ in der Vorlesung definiert worden?

199. Warum haben cos und sin die Periode 2π und allgemeiner die Perioden $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$? Warum gibt es keine anderen Perioden?

200. Wie sind die Arcus-Funktionen definiert? (arcsin, arccos, arctan)

201. Wie sind die (reellen) hyperbolischen Funktionen und ihre Umkehrfunktionen definiert?

202. Begründen Sie, warum die binomische Reihe $\sum_{k=}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ den Konvergenzradius 1 hat, und warum für $|x| < 1$ gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

203. Geben Sie die Potenzreihenentwicklungen für $\sqrt{1+x}$ und $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ um $x = 0$ an.

204. Was besagt der Abelsche Grenzwertsatz?

205. Begründen Sie mit dem Abelschen Grenzwertsatz und der Reihenentwicklung von $\arctan(x)$ um $x = 0$, daß gilt $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots$

12 Integration (einschließlich uneigentlicher Integrale)

206. Was versteht man unter einer Treppenfunktion $t : [a,b] \to \mathbb{R}$, und wie ist ihr Integral erklärt? Warum ist das Integral unabhängig von der zugrundeliegenden Zerlegung von $[a,b]$?

207. Welche Haupteigenschaften hat die Abbildung $I : T([a,b]) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto I(t)$ im Raum der reellwertigen Treppenfunktionen $T([a,b])$?

208. Was ist eine Regelfunktion, und wie wird ihr Integral erklärt?

209. Ist (t_n) eine Folge von Treppenfunktionen $t_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen die Regelfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist die Folge $(I(t_n))$ der Integrale konvergent und

$$I(f) := \lim_{n\to\infty} I(t_n)$$

ist unabhängig von der approximierenden Folge von Treppenfunktionen.

210. Was bedeutet es, daß das Regelintegral ein lineares monotones beschränktes Funktional ist?

211. Was besagt die Standardabschätzung für Integrale?

212. Ist (f_n) eine Folge von Regelfunktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist f ebenfalls eine Regelfunktion und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = I(f) = I(\lim_{n\to\infty} f_n)$$

(Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung bei gleichmäßiger Konvergenz.)

213. Geben Sie ein Gegenbeispiel an, daß dieser Satz bei nur punktweiser Konvergenz i.a. falsch ist.

214. Welche wichtigen Klassen von Funktionen auf $[a, b]$ sind Regelfunktionen?

215. Berechnen Sie mit dem Vertauschungssatz $\int_a^b \exp(t)\mathrm{d}t$. (Tip: Potenzreihenentwicklung)

216. Was ist ein Banachraum?

217. Warum ist der Raum $R([a, b])$ der Regelfunktionen auf $[a, b]$ ein Banachraum?

218. Kennen Sie weitere Beispiele von Banachräumen?

219. Warum ist der Vektorraum $T([a, b])$ der Treppenfunktionen auf $[a, b]$ kein Banachraum?

220. Gibt es auch unstetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die Stammfunktionen besitzen?

221. Was ist der Inhalt des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung?

222. Was bedeutet die Aussage „Integration glättet"?

223. Was besagt die Regel über partielle Integration?

224. Was besagt die Substitutionsregel?

225. Was besagt der Satz über die Existenz- und Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung von rationalen Funktionen?

226. Aus welchen Funktionstypen setzt sich eine Stammfunktion einer rationalen Funktion f (einer Veränderlichen) i.a. zusammen?

227. Was besagt die Trapezregel für die Integration einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$?

228. Was besagt die Keplersche Faßregel (Simpson-Regel) für die Integration einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$?

229. Warum werden durch die Keplersche Faßregel auch Polynome vom Grad 3 exakt integriert?

230. Welche Typen von uneigentlichen Integralen sind Ihnen bekannt? Geben Sie jeweils ein Beispiel.

231. Begründen Sie, warum das (doppelt) uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^{s-1} \exp(-t)\mathrm{d}t$$

für alle $x > 0$ existiert (konvergiert).

232. Nennen Sie die Eulersche Definition und die Haupteigenschaften der Γ-Funktion.

233. Was besagt der Satz von Bohr-Mollerup?

234. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Γ-Funktion und der Eulerschen Beta-Funktion?

235. Wie lautet die Gaußsche Produktdarstellung von Γ?

236. Geben Sie eine Produktdarstellung von $\frac{1}{\Gamma}$ an, aus welcher man die Nullstellen von $\frac{1}{\Gamma}$ ablesen kann.

237. haben Sie eine Beweisidee für den Eulerschen Ergänzungssatz

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z})?$$

238. Aus dem Ergänzungssatz ergibt sich sofort $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

239. Können Sie diesen Funktionswert auch anders berechnen? (z.B. mit der Wallisschen Produktformel für $\frac{\pi}{2}$)

240. Wieviele Stellen im Dezimalsystem hat 1.000.000! ?

241. Welche Größenordnung hat die Zahl $\frac{1}{2^{80}}\binom{80}{40}$, allgemeiner $\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$?

242. Wie lautet die Stirlingsche Formel? Geben Sie eine Beweisskizze.

13 Taylorsche Formel und Taylorreihen

243. Was versteht man unter dem n-ten Taylorpolynom einer Funktion $f \in \mathcal{C}^n(M;\mathbb{C})$ zu einer Stelle $a \in M$ ($M \subset \mathbb{R}$ ein echtes Intervall)? Geben Sie Beispiele.

244. Was besagt der Taylorsche Satz?

245. Welche Formen für das Restglied sind Ihnen bekannt?

246. Nennen Sie einige Anwendungen der Taylorschen Formel mit Restglied, insbesondere auch ein hinreichendes Kriterium für lokale Extremwerte.

247. Was besagt der Eindeutigkeitssatz über die Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe?

248. Wann konvergiert die Taylorreihe einer Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{C})$ und stellt die Funktion dar? (Hinreichendes Kriterium)

249. Wie lautet das Cauchysche Gegenbeispiel für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, für welche die Taylorreihe zum Entwicklungspunkt 0 für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, die Reihe aber in keinem vom Nullpunkt verschiedenen Punkt die Funktion darstellt?

250. Die Taylorreihen der Standardfunktionen sollten Ihnen geläufig sein (exp, sin, cos, sinh, cosh, ln, arctan, ...)

251. Welche Methoden verwendet man (häufig mit Erfolg), um die Taylor-Reihen von Funktionen zu ermitteln?

14 Differentialrechnung

252. Was besagt der Äquivalenzsatz für differenzierbare Funktionen?

253. Wie ist das Differential einer im Punkte $a \in D$ differenzierbaren Funktion $f : D \to G$ definiert? ($D \subset \mathbb{R}$ etwa ein echtes Intervall)?

254. Können Sie die Rechenregeln für differenzierbare Funktionen beweisen?

255. Wie lauten die Produkt- bzw. Quotientenregel?

256. Können Sie die Kettenregel beweisen?

257. Ist die Umkehrfunktion einer streng monotonen differenzierbaren Funktion auf einem Intervall $D \subset \mathbb{R}$ auch stets wieder differenzierbar? (Betrachten Sie z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.) Unter welcher zusätzlichen Voraussetzung ist die Umkehrfunktion differenzierbar?

258. Wie lautet der Satz über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion? Erläutern Sie ihn am Beispiel von exp und ln.

259. Was besagt das Fermatsche Lemma über das Vorliegen eines lokalen Extremas einer differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in einem inneren Punkt $a \in D$?

260. Was besagt der Satz von Rolle?

261. Was besagt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung?

262. Kann man in diesem die Voraussetzungen (Stetigkeit im abgeschlossenen Intervall, Differenzierbarkeit im offenen Intervall) abschwächen?

263. Was besagt der Schrankensatz?

264. Nennen Sie einige Anwendungen des Mittelwertsatzes bzw. des Schrankensatzes. (Kennzeichnung konstanter Funktionen auf Intervallen, Monotoniekriterien, Konvexitätskriterien)

265. Wie lautet der verallgemeinerte Mittelwertsatz der Differentialrechnung?

266. Warum besitzt eine Regelfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ genau dann eine Stammfunktion, wenn f stetig ist?

15 Fourier-Reihen

267. Was ist eine periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$? Nennen Sie Beispiele. Warum kann man sich auf die Betrachtung von 2π-periodischen Funktionen beschränken?

268. Was versteht man unter einem trigonometrischen Polynom?

269. Was versteht man unter einer trigonometrischen Reihe?

270. Wie berechnen sich die Koeffizienten dieser Polynome bzw. Reihen mit Hilfe der dargestellten Funktionen?

271. Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, die sich durch die trigonometrische Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k$ ($e_k(x) = \exp(\mathrm{i}kx)$) darstellen läßt, wobei die Reihe gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert, dann ist

$$a_k = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-\mathrm{i}kt) \mathrm{d}t.$$

272. Wie sind die Fourier-Koeffizienten einer lokal integrierbaren 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert?

273. Was versteht man unter der *Fourier-Reihe* einer solchen Funktion?

274. Was besagen die Orthogonalitätsrelationen für das System $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$? ($e_k(x) = \exp(\mathrm{i}kx)$)

275. Wie lauten die *Euler-Fourier*schen Formeln zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten?

276. Können Sie die Fourier-Koeffizienten der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } -\pi < x < 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, x = \pm\pi, \\ 1, & \text{falls } 0 < x < \pi, \\ f(x + 2\pi) & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

berechnen? Wie lautet die Fourier-Reihe $S_\infty(f)(x)$? Gilt $S_\infty(f)(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

277. Erläutern Sie das *Gibbsche Phänomen* am vorigen Beispiel.

278. Was versteht man unter dem *Dirichlet-Kern* einer Funktion $f \in V$? Welche Haupteigenschaften hat er?

279. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den „reellen“ Koeffizienten a_k, b_k und den komplexen Koeffizienten $c_k = \hat{f}(k)$?

280. Wie vereinfacht sich die Fourier-Reihe einer Funktion $f \in V$ (V wie in der der Vorlesung), wenn f

  (a) eine gerade Funktion,

  (b) eine ungerade Funktion

  ist?

281. Wie lautet der Satz von Dirichlet über die Konvergenz der Fourier-Reihe einer Funktion $f \in V$, vorausgesetzt die einseitigen Grenzwerte

$$f'_+(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) - f(x_+)}{h}$$

und

$$f'_-(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x+h) - f(x_-)}{h}$$

existieren. ($f(x_+)$ und $f(x_-)$ sind die einseitigen Grenzwerte in x, die nach Voraussetzung (f Regelfunktion) stets existieren.)

282. Können Sie unter Anwendung des Dirichletschen Satzes das Dirichlet-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

berechnen? (Die Existenz wurde bei den uneigentlichen Integralen gezeigt.)

283. Was besagt der Satz von Féjer? Wie ist der Féjer-Kern definiert? Was besagt der Zusatz, wenn f stetig ist?

284. Folgen Sie aus dem Satz von Féjer: Konvergiert die Fourier-Reihe einer Funktion $f \in V$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$S_\infty(f)(x) = \tilde{f}(x) := \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}.$$

285. Ist $f \in V$ und f n-mal stetig differenzierbar ($n \geq 2$), dann konvergiert die Fourier-Reihe $S_\infty(f)$ von f auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f.

286. Welche Minimaleigenschaft haben die Fourier-Koeffizienten für die Polynome einer Funktion $f \in V$?

287. Begründen Sie, warum das n-te Fourier-Polynom von $f \in V$ die Orthogonalprojektion von f auf den Raum der von $e_{-n}, e_{-(n-1)}, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_n$ aufgespannten Fourier-Polynome ist.

288. Wie lautet die Besselsche Ungleichung?

289. Was besagt die Parsevalsche Gleichung?

290. Was folgt aus der Besselschen Ungleichung über das Wachstum der Fourier-Koeffizienten?

291. Was besagt die *Vollständigkeitsrelation* für das System $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ im Raum V?

292. Zeigen Sie, daß für die Fourier-Reihe $S_\infty(f)$ der Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2$ gilt

$$S_\infty(f)(x) = \tfrac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$$

und beweisen sie damit

$$\zeta(2) := \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k^2} = \tfrac{\pi^2}{6}.$$

Verwenden Sie die Vollständigkeitsrelation (Besselsche Gleichung) für das System $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ und die Funktion f, um auch

$$\zeta(4) := \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k^4} = \tfrac{\pi^4}{90}$$

zu zeigen.

16 Metrische Räume und Abbildungen zwischen metrischen Räumen

293. Was versteht man unter einer *Metrik* auf einer Menge X $(\neq \emptyset)$?

294. Was ist ein metrischer Raum?

295. Nennen Sie Beispiele für metrische und normierte Räume.

296. Welche Metriken (Normen) auf dem $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ sind Ihnen bekannt?

297. Wie ist der Begriff der ε-Umgebung (offene Kugel) in einem metrischen Raum definiert?

298. Wie sind die Begriffe „offene Menge“ und „Umgebung“ in einem metrischen Raum definiert?

299. Welche Grundeigenschaften hat das System der offenen Teilmengen eines metrischen Raumes?

300. Warum ist eine offene Kugel offen?

301. Wann heißt eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X abgeschlossen?

302. Wie ist der Rand einer Teilmenge $A \subset X$ definiert?

303. Warum gilt A abgeschlossen in $X \iff \partial A \subset A$? Wie ist der Abschluß $\bar{A}$ definiert?

304. Was ist ein Häufungspunkt einer Teilmenge M eines metrischen Raumes X?

305. Wie ist das *Innere* einer Teilmenge $M \subset X$ definiert? Warum ist das Innere $\mathring{M}$ stets eine offene Menge von X und wann gilt M offen $\iff M = \mathring{M}$ und $A \subset X$ abgeschlossen $\iff A = \bar{A}$? $(\bar{A} = A \cup \partial A)$

306. Wann heißt eine Folge (x_k) von Elementen x_k eines metrischen Raumes X konvergent mit dem Grenzwert $x \in X$?

307. Warum ist der Grenzwert im Fall der Existenz eindeutig bestimmt? (Hausdorff-Eigenschaft)

308. Wann heißen 2 Metriken d und d' auf X streng äquivalent?

309. Warum sind die von der Maximumsnorm bzw. euklidischer Norm auf $\mathbb{C}^n$ stammenden Metriken streng äquivalent?

310. Was bedeutet dies für die Konvergenz einer Folge (a_k) im $\mathbb{C}^n$ bezüglich der euklidischen Metrik?

311. Was ist ein vollständiger metrischer Raum?

312. Warum ist $\mathbb{C}^n$ (bzw. $\mathbb{R}^n$) mit der euklidischen oder Maximumsmetrik versehen ein vollständiger metrischer Raum?

313. Kennen Sie einen nicht vollständigen metrischen Raum?

314. Was ist ein Banachraum, was ist ein Hilbertraum? Nennen Sie Beispiele und Gegenbeispiele.

315. Erläutern Sie den Begriff der ε-δ-Stetigkeit bzw. der Folgenstetigkeit für Abbildungen zwischen metrischen Räumen.

316. Warum ist ε-δ-Stetigkeit zur Folgenstetigkeit äquivalent?

317. Formulieren Sie den Stetigkeitsbegriff mit Hilfe des Begriffs der Umgebung bzw. offener Mengen. Geben Sie insbesondere eine äquivalente Aussage mit Hilfe offener Mengen für die *globale Stetigkeit*.

318. Begründen Sie: Die Zusammensetzung stetiger Funktionen ist wieder stetig.

319. Wie ist die Operator-Norm für eine lineare Abbildung $A : V \to W$ (V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume) definiert?

320. Warum ist die Operator-Norm tatsächlich eine Norm?

321. Zeigen Sie: Eine lineare Abbildung $A : V \to W$ (V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume) ist genau dann stetig, wenn Sie beschränkt ist, d.h. es gibt ein $C > 0$ mit $\|Av\|_W \leq C\|v\|_V$ für alle $v \in V$.

322. Nennen Sie ein Beispiel für einen Vektorraum V bzw W und eine lineare Abbildung $D : V \to W$, die nicht stetig ist.

323. Erläutern Sie folgende Aussage und präzisieren Sie die Voraussetzungen: f hat bei Annäherung an a den Grenzwert g bzw.

$$g = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D \\ x \neq a}} f(x).$$

324. Erläutern Sie den Begriff der *stetigen Fortsetzbarkeit.*

325. Was versteht man unter der induzierten Metrik auf einer Teilmenge M eines metrischen Raums? Wann muß man nicht zwischen den *offenen Mengen in* M und den *offenen Mengen in* X unter scheiden? Nennen Sie ein Beispiel, wo es auf den Unterschied ankommt.

326. Wie ist die Produktmetrik definiert, welche *universelle Eigenschaft* hat sie?

327. Welche Konsequenzen ergeben sich für stetige Abbildungen $f : D \to \mathbb{R}^m$ ($D \subset \mathbb{R}^n$; $m, n \in \mathbb{N}$) hinsichtlich der Komponenten $f_\nu : D \to \mathbb{R}$ ($1 \leq \nu \leq m$)?

328. Motivieren Sie die Einführung des Begriffs „kompakt“.

329. Erläutern Sie den Begriff „kompakt“, insbesondere auch den Begriff der Überdeckung und der Teilüberdeckung.

330. Warum ist $\mathbb{R}^n$ kein kompakter metrischer Raum?

331. Wann ist ein Teilraum $A \subset X$ kompakt?

332. Erläutern Sie, warum ein kompakter Teilraum K eines metrischen Raumes stets beschränkt (was bedeutet das?) und abgeschlossen ist.

333. Inwieweit gilt hiervon die Umkehrung?

334. Was besagt das allgemeine Intervalschachtelungsprinzip?

335. Warum, ist das Produkt $X \times Y$ (versehen mit der Produkttopologie) zweier kompakter metrischer Räume X und Y wieder kompakt?

336. Warum ist ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt?

337. Warum ist $[a, b]$ folgenkompakt?

338. Warum sind für $[a, b]$ die Kompaktheit und Folgenkompaktheit äquivalent?

339. Was besagt der Satz von Heine-Borel im $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$?

340. „Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt." Erläutern und präzisieren Sie diese Aussage.

341. Welche Folgerungen ergeben sich hieraus für reellwertige Funktionen auf kompakten Mengen?

342. Warum ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ (X kompakter metrischer Raum, Y beliebiger metrischer Raum) stets gleichmäßig stetig?

343. Wie kann man diesen Satz zur Definition von iterierten Integralen verwenden?

344. Sei $X \neq \emptyset$. Wie ist auf dem Vektorraum $B(X)$ der beschränkten (reellwertigen) Funktionen die Supremumsnorm definiert?

345. Erläutern Sie den Unterschied zwischen gleichmäßiger und punktweiser Konvergenz.

346. Wie ist das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ definiert?

347. Was besagt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung im $\mathbb{K}^n$. Wie folgt aus ihr die Dreiecksungleichung für die euklidische Norm?

348. Warum gibt es zu jeder stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge (p_k) von Polynomen, die gleichmäßig gegen f konvergiert? (Spezialfall des *Weierstraßschen Approximationssatzes*)

349. Folgern Sie mit Hilfe des Weierstraßschen Approximationssatzes, daß jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion besitzt. (Man braucht also die Integralrechnung nicht zu bemühen, um nachzuweisen, daß eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall eine Stammfunktion besitzt!)

350. Was besagt der Satz von Bolzano-Weierstraß im $\mathbb{R}^n$?

351. Was besagt der Banachsche Fixpunktsatz? Können Sie ihn beweisen?

352. Nennen Sie (mindestens) zwei Anwendungen des Banachschen Fixpunktsatzes.

17 Differentialrechnung für Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

353. Wann heißt eine Abbildung ($D \subset \mathbb{R}^n$ offen) $f : D \to \mathbb{R}^m$ (total) differenzierbar an der Stelle $a \in D$? ($n, m \in \mathbb{N}$)

354. Wie ist das Differential $\mathrm{d}f(a)$ erklärt?

355. Warum ist eine in $a \in D$ total differenzierbare Funktion dort partiell differenzierbar?

356. Wie ist die Jacobi-Matrix $J(f; a) =$ erklärt? Welcher zusammenhang besteht mit dem Differential $\mathrm{d}f(a)$?

357. Wie ist $\operatorname{grad} f(a)$ oder $\nabla f(a)$ definiert?

358. Wenn $\operatorname{grad} f(a)$ existiert, ist dann f notwendig in a differenzierbar? Beweis oder Gegenbeispiel.

359. Nennen Sie Permanenzeigenschaften des Differenzierbarkeitsbegriffs.

360. Was besagt die *Kettenregel* für die Zusammensetzung differenzierbarer Abbildungen?

361. Spezialisieren Sie die Dimensionen m und n, und formulieren Sie Spezialfälle der Kettenregel.

362. Erläutern Sie, warum für eine in $a \in D$ differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ alle Richtungsableitungen $\partial_\nu f$ in a existieren, und warum $\partial_\nu f(a) = \langle \operatorname{grad} f(c), v \rangle$. ($\|v\|_2 = 1$) Welche Maximaleigenschaft hat $\nabla f(c)$ in diesem Fall?

363. Kennen Sie ein Beispiel einer Funktion für welche alle Richtungsableitungen in einem Punkt $a \in D$ existieren, die aber in a nicht (total) differenzierbar ist?

364. Was ist das wichtigste hinreichende Kriterium für die totale Differenzierbarkeit eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^m$?

365. Eine differenzierbare Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt in $a \in D$ stetig differenzierbar, wenn durch $a \mapsto \mathrm{d}f(a)$ eine stetige Abbildung $D \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ definiert wird. Zeigen Sie: h ist genau dann stetig differenzierbar in c, wenn die Komponentenfunktionen f_ν von f in c stetig partiell differenzierbar sind. ($1 \le \nu \le m$)

366. Die folgenden Implikationen für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sollten Ihnen bekannt sein:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{stetig} & \\
\begin{array}{c}\text{stetig partiell}\\ \text{differenzierbar}\end{array} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \text{(total) differenzierbar} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \begin{array}{c}\text{partiell}\\ \text{differenzierbar}\end{array} \\
\begin{array}{c}\text{stetig}\\ \text{differenzierbar}\end{array} \arrow[r, Rightarrow] & \begin{array}{c}\text{alle}\\ \text{Richtungsableitungen}\\ \text{existieren}\end{array} &
\end{tikzcd}$$

367. Erläutern Sie die Schreibweise

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

für eine differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$.

368. Wie sind die höheren partiellen Ableitungen definiert? Welche Motivationen für diese sind Ihnen geläufig bzw. werden in der Literatur verwendet?

369. Was besagt der Satz von H. A. Schwarz über die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge? Gilt er immer? Gegenbeispiel?

370. Wie ist die Rotation eines Vektorfelds $F := (F_1, F_2, F_3) : D \to \mathbb{R}^3$ definiert? ($D \subset \mathbb{R}^3$ offen) Erläutern Sie die Physiker-Schreibweise

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \times (F_1, F_2, F_3).$$

371. Warum ist für ein zweimal stetig partiell differenzierbares Vektorfeld $F : D \to \mathbb{R}^3$ ($D \subset \mathbb{R}^3$ offen) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} F = 0$?

372. Wie ist die *Divergenz* eines Vektorfelds $F : D \to \mathbb{R}^n$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ offen) definiert?

373. Warum ist für ein zweimal stetig partiell differenzierbare Vektorfeld $f : D \to \mathbb{R}^3$ ($D \subset \mathbb{R}^3$ offen) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$?

374. Ist $F := (F_1, \ldots, F_n) : D \to \mathbb{R}^n$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ offen) ein zweimal stetig partiell differenzierbares Vektorfeld, dann gibt es höchstens dann eine stetig partiell differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f = F$, wenn $\partial_j F_l = \partial_l F_j$ gilt $(1 \leq j < l \leq n)$ (Integrabilitätsbedingungen). Diese Bedingungen sind damit äquivalent, daß die Jacobi-Matrix $J(F; x)$ symmetrisch ist.

375. Zeigen Sie, daß das Gravitationsfeld $F : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -GmM \frac{x}{\|x\|_2^3}$ die Integrabilitätsbedingungen erfüllt (rotationsfrei ist), und finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f = F$.

376. Was besagt der Mittelwertsatz für differenzierbare Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig oder konvex)?

377. Was besagt der Mittelwertsatz in integrierter Form?

378. Was besagt der Schrankensatz?

379. Was ist ein zusammenhängender bzw. bogenweise zusammenhängender metrischer Raum?

380. Warum sind Intervalle zusammenhängend?

381. Warum gilt stets: Aus bogenweise zusammenhängend folgt zusammenhängend.

382. Gilt stets die Umkehrung? Gegenbeispiel!

383. Warum gilt für offene Teilmengen $D \subset \mathbb{R}^n$ die Umkehrung?

384. Wie lassen sich die konstanten Funktionen auf Gebieten $D \subset \mathbb{R}^n$ charakterisieren?

385. Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die in $a \in D$ ein lokales Extremum hat, dann ist notwendig $\nabla f(a) = 0$.

386. Was ist ein kritischer (stationärer) Punkt für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$?

387. Was beinhaltet die *Taylorsche* Formel mit Restglied für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(D; \mathbb{R})$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen?

388. Wie kann man sie anwenden, um *hinreichende* Kriterien für das Vorliegen von lokalen Extrema zu erhalten?

389. Wie ist die Hesse-Matrix für eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion definiert? Warum ist sie symmetrisch?

390. Was sind die wichtigsten Kriterien für positive bzw. negative Definitheit einer symmetrischen Matrix $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

391. Wie lautet ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Minimas für eine Funktion $f \in \mathbb{C}^2(D; \mathbb{R})$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen?

392. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren von K differenzierbar. Wie würden Sie vorgehen, um alle Extrema (lokale, globale) von f zu bekommen?

393. Wie lautet der *lokale Umkehrsatz* für differenzierbare Abbildungen $f : D \to \mathbb{R}^n$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ offen)?

394. Wann ist $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine offene Abbildung?

395. Was besagt der globale Umkehrsatz?

396. Was besagt der Satz über die Lagrangeschen Multiplikatoren? (Extremwerte unter Nebenbedingungen)

397. Können Sie diesen Satz anwenden, um zu zeigen, daß eine reelle symmetrische Matrix stets einen reellen Eigenwert hat?