Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

p-adische Analysis II

Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 8 11. Juni 2013

Sei K ein nicht-archimedischer vollständiger Körper mit Bewertungsring $\mathcal{O}$.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei $f : G_1 \to G_2$ ein Homomorphismus von Liegruppen über K. Zeigen Sie, dass f einen Homomorphismus $\mathrm{Lie}(f) := T_e(f) : \mathrm{Lie}(G_1) \to \mathrm{Lie}(G_2)$ der zugehörigen Liealgebren induziert.

Aufgabe 2. *(5 Punkte)*
Sei (G, ω) eine p-bewertete Gruppe. Mit Hilfe des Axioms $w(g) > \frac{1}{p-1}$ kann man zeigen, dass $(gh)^p G_{(\nu+1)+} = g^p h^p G_{(\nu+1)+}$ gilt, falls $\nu > 0$ und $g, h \in G$ mit $\omega(h) \geq \nu = \omega(g)$. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $\mathrm{gr}_\nu G \to \mathrm{gr}_{\nu+1} G,\ gG_{\nu+} \mapsto g^p G_{(\nu+1)+}$, ist wohldefiniert, $\mathbb{F}_p$-linear und induziert daher eine $\mathbb{F}_p$-lineare Abbildung $\pi : \mathrm{gr}\, G \to \mathrm{gr}\, G$

b) $\mathrm{gr}\, G$ ist ein torsionsfreier $\mathbb{F}_p[\pi]$-Modul.

c) Ist (G, ω) endlich erzeugbar als $\mathbb{F}_p[\pi]$-Modul und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, so gilt $\mathrm{rang}\, H \leq \mathrm{rang}\, G$. Falls H offen in G ist, so gilt dort Gleichheit.

Aufgabe 3. *(3 Punkte)*
Sei G eine pro-p Gruppe und $g_1, \dots g_r \in G$. Zeigen Sie: Die Abbildung $\mathbb{Z} \to G,\ x \mapsto g_i^x$ induziert eine stetige Abbildung $f : \mathbb{Z}_p^r \to G,\ (x_1, \dots, x_r) \mapsto g_1^{x_1} \cdot \dots \cdot g_r^{x_r}$, die im allgemeinen kein Gruppenhomomorphismus ist. Ist f bijektiv, so ist f ein Homöomorphismus.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei L/K eine endliche Erweiterung mit Bewertungsring $\mathcal{O}_L$ und G eine Liegruppe über K. Zeigen Sie: Die Inklusion

$$\mathcal{O}_L[[G]] = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_L,\mathrm{stetig}}(C(G, \mathcal{O}_L), \mathcal{O}_L) \hookrightarrow D^c(G, L)$$

induziert einen Isomorphismus $L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L[[G]] \cong D^c(G, L)$, d.h. $D^c(G, L)$ ist eine L-Algebra mit separiert stetiger Multiplikation.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/panalysis2`
Abgabe bis spätestens 18. Juni 2013 vor der Vorlesung, in A. Pals Kasten im 1. OG.