Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel

Lineare Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 12 3. Juli 2014

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Berechnen Sie für folgende symmetrische Matrizen A_i über $\mathbb{Q}$ Basiswechselmatrizen S_i, sodass $S_i^t A_i S_i$ in Diagonalgestalt ist:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Seien K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, sowie q eine nicht-ausgeartete quadratische Form auf V. Ist A die Strukturmatrix von q bzgl. einer gewählten Basis, so gilt also $\det A \in K^\times$.

a) Zeigen Sie: Ist B die Darstellungsmatrix von q bzgl. einer anderen Basis, so gilt $\det A \sim \det B$ in der Quotientenmenge $K^\times/(K^\times)^2$, wobei $(K^\times)^2 = \{x \cdot x |\ x \in K^\times\}$ und $x \sim y :\iff xy^{-1} \in (K^\times)^2$ für $x, y \in K^\times$. Insbesondere ist die **Diskriminante** $d(q) := [\det A] \in K^\times/(K^\times)^2$ wohldefiniert.

b) Bestimmen Sie $K^\times/(K^\times)^2$ für $K = \mathbb{R}$ und überlegen Sie, warum die Diskriminante in diesem Fall noch nicht ausreicht, um quadratische Formen bis auf Äquivalenz zu klassifizieren.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Seien K ein Körper, (V, q) ein endlich-dimensionaler nicht-ausgearteter quadratischer Raum über K und $U_1, U_2 \leq V$ Unterräume. Zeigen Sie mit Hilfe des Witt'schen Kürzungssatzes: Sind $(U_1, q|_{U_1})$ und $(U_2, q|_{U_2})$ nicht-ausgeartet, und ist $s : U_1 \to U_2$ eine Isometrie, so existiert eine Isometrie $\tilde{s} : V \to V$ mit $\tilde{s}|_{U_1} = s$.
Hinweis: Betrachten Sie die orthogonalen Komplemente $U_1^\perp$ und $U_2^\perp$, zeigen Sie $V = U_i \oplus U_i^\perp$ $(i = 1, 2)$, und finden Sie geeignete Orthogonalbasen.
Bemerkung: Diese Aussage ist sogar äquivalent zum Kürzungssatz.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Seien $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^4$ und $q_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ sowie $q_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ zwei quadratische Formen auf V. Zeigen Sie:

a) Die quadratischen Formen $q_1(x_1, x_2, 0, 0)$ und $q_2(x_1, x_2, 0, 0)$ (aufgefasst als Formen auf $\mathbb{R}^2$) sind äquivalent zu der Form $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$.

b) q_1 und q_2 haben dieselbe Diskriminante und stellen dieselben Elemente in $\mathbb{R}$ dar.

c) q_1 und q_2 sind nicht äquivalent.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/la2`
Abgabe bis spätestens 10. Juli 2014 vor der Vorlesung, bei den Kästen am Eingang von INF288.