Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische K-Theorie

Wintersemester 2010/2011

Aufgabenblatt 7 29. November 2010

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei R ein Ring mit Eins. Zeigen Sie: Der Zentralisator von $E(R)$ in $GL(R)$ ist trivial, d.h. das Zentrum von $E(R)$ ist trivial.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring mit Eins. Sei C_n die Untergruppe von $ST(R)$, die von allen $x_{in}(t), i \neq n, t \in R$, erzeugt ist. Zeigen Sie, dass die Abbildung $C_n \to ST(R) \xrightarrow{f} E(R)$ bijektiv ist. Hierbei ist f der in der Vorlesung definierte natürliche Morphismus $x_{ij}(r) \mapsto e_{ij}(r)$.
Analog sei P_n die Untergruppe von $ST_n(R)$, die von allen $x_{in}(t), 1 \leq i < n, t \in R$, erzeugt ist. Zeigen Sie, dass die Abbildung $P_n \to ST_n(R) \xrightarrow{f_n} E_n(R)$ injektiv ist.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei R ein Ring mit Eins und $I \leq R$ ein Ideal sowie $K_1(R, I)$ die relative K_1-Gruppe. Sei $GL(I) := \ker(GL(R) \to GL(R/I))$ sowie $E(R, I)$ der kleinste Normalteiler von $E(R)$, der alle $e_{ij}(r)$ mit $r \in I$ enthält. Zeigen Sie: $K_1(R, I) \cong GL(I)/E(R, I)$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei $\mathcal{B}$ eine Serre Unterkategorie einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Sei $Ch^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ die Waldhausen-Unterkategorie von $Ch^b(\mathcal{A})$ von beschränkten Komplexen C, sodass $H_i(C) \in \mathcal{B}$ für alle i. Zeigen Sie:

$$K_0\mathcal{B} \cong K_0 Ch^b(\mathcal{B}) \cong K_0 Ch^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}).$$

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/k-theorie`

Abgabe bis spätestens 6. Dezember 2010 vor der Übung.