Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie II

Sommersemester 2009

Aufgabenblatt 8 20. Mai 2009

Aufgabe 1. *(8 Punkte)*
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus (X, Y lokal noethersch) von endlichem Typ und $x \in X$ sowie $y = f(x)$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) f ist unverzweigt in x.

b) $X_y = X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y)) \to \kappa(y)$ ist unverzweigt in x.

c) x hat in X_y eine Umgebung $\mathrm{Spec}(A)$, wobei A ein endliches Produkt von endlichen seperablen Körpererweiterungen von $\kappa(y)$ ist.

d) x ist isoliert in X_y und der Ring $\mathcal{O}_{X_y,x}$ ist ein Körper sowie eine seperable Erweiterung von $\kappa(y)$.

Hinweis: Man erinnere sich an die Beschreibung endlicher diskreter Schemata. Es darf ohne Beweis benutzt werden: Ist A/k eine artinsche endlich erzeugte k-Algebra (k Körper), so hat A als k-Modul endlichen Rang.

Aufgabe 2. *(8 Punkte)*
Sei k ein Körper, X ein k-Schema von endlichem Typ sowie $x \in X$. Zeige mit Hilfe von Aufgabe 4 des letzten Blatts: X ist glatt in $x \iff \Omega^1_{X,x}$ frei von Rang $\dim_x X$ (bei "$\Leftarrow$" soll man den Nachweis der Einfachheit halber nur für den Fall, dass x ein abgeschlossen Punkt ist, führen). Folgere für X irreduzibel: X ist glatt $\iff \Omega^1_{X/k}$ ist eine lokal-freie Garbe von Rang $\dim X$.

Abgabe bis spätestens 28. Mai 2009, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.