Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie II

Sommersemester 2009

Aufgabenblatt 2 9. April 2009

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei A ein kommutativer Ring mit 1 und B ein A-Modul. Sei $\rho : B \otimes_A B \to B$ die Diagonale $\rho(b_1 \otimes b_2) = b_1 b_2$ sowie $I = \ker(\rho)$. $B \otimes_A B$ (und somit I/I^2) ist via $b \cdot (b_1 \otimes b_2) = b_1 \otimes bb_2$ in natürlicher Weise ein B-Modul. Sei

$$d : B \to I/I^2, \quad db = b \otimes 1 - 1 \otimes b.$$

Zeige:

a) d ist eine A-Derivation.

b) Der B-Modul I/I^2 erfüllt mit der Derivation d die universelle Eigenschaft des Differentialmoduls, d.h. $I/I^2 \cong \Omega^1_{B/A}$.

Aufgabe 2. *(3 Punkte)*
Sei $A = \mathbb{R}$ und $B = C^\infty(U)$ der Ring der unendlich-oft differenzierbaren Funktionen auf einem offenen Intervall $U \subset A$. Leite unter Verwendung von Aufgabe 1 formal die Gleichung $df = f'(x)dx$ (x Koordinate von U) für $f \in C^\infty(U)$ her.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Zeige:

a) $\Omega^1_{A[[T]]/A}$ ist i.a. nicht endlich-erzeugbar über $A[[T]]$.

b) Man hat mit $\varphi(dF(T)) = F'(T)dT$ eine exakte Sequenz

$$0 \to \bigcap_{n \geq 1} T^n \Omega^1_{A[[T]]/A} \to \Omega^1_{A[[T]]/A} \xrightarrow{\varphi} A[[T]]dT.$$

Aufgabe 4. *(5 Punkte)*
Sei A ein kommutativer Ring mit 1 und M, N A-Moduln mit Filtrierungen $F : M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots, F' : N = N_0 \supset N_1 \supset \ldots$. Sei $f : M \to N$ ein Homomorphismus, der $f(M_n) \subseteq N_n$ erfüllt, d.h. f induziert einen Homomorphismus

$$\mathrm{gr}(f) : \bigoplus_{i \geq 0} M_i/M_{i+1} \to \bigoplus_{i \geq 0} N_i/N_{i+1}.$$

Zeige:

a) Wenn gr(f) injektiv ist und $\bigcap M_i = 0$ gilt, so ist f injektiv.

b) Wenn gr(f) surjektiv, M komplett bzgl. F und $\bigcap N_i = 0$ ist, so ist f surjektiv und N komplett bzgl. F'.

c) Ist $M = N = R[[X_1, \ldots, X_n]]$, $I = (X_1, \ldots, X_n)$, $F = F' : M =: I^0 \supset I^1 \supset \ldots$, und $f : M \to N$ ein R-Algebrenmorphismus, so ist f ein Isomorphismus genau dann, wenn gr(f) einer ist.

Hinweis: Es darf die aus der Algebra 2 bekannte Tatsache benutzt werden, dass $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ die Komplettierung von $R[X_1, \ldots, X_n]$ bzgl. I (als Ideal in $R[X_1, \ldots, X_n]$) ist.

Abgabe bis spätestens 16. April 2009, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.