Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/09

Aufgabenblatt 6 13. November 2008

A, B = kommutative Ringe mit 1.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei X ein topologischer Raum. Ist $X = \mathrm{Spec}(A)$, so ist X nach Vorlesung quasi-kompakt. Wir wollen weitere topologische Eigenschaften von X untersuchen. Zeige:

a) X ist noethersch genau dann, wenn jede offene Teilmenge von X quasi-kompakt ist,

b) $\mathrm{Spec}(A)$ ist im allgemeinen nicht noethersch,

c) Wenn der Ring A noethersch ist, so auch $\mathrm{Spec}(A)$. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei $X = \mathrm{Spec}(A)$. Zeige:

a) Jede lokal abgeschlossene irreduzible Teilmenge $Z \neq \emptyset$ von X (lokal abgeschlossen heisst: $Z = U \cap V$ mit U offen, V abgeschlossen) enthält einen eindeutig bestimmten generischen Punkt,

b) Jede irreduzible Teilmenge von X enthält höchstens einen generischen Punkt,

c) Ist A ein Hauptidealring mit unendlich vielen maximalen Idealen, so ist jede Teilmenge bestehend aus unendlich vielen abgeschlossenen Punkten irreduzibel, enthält aber keinen generischen Punkt.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Ist $X = \mathrm{Spec}(A)$ und $\wp \in X$, so kann man den Restklassenkörper $\kappa(\wp) = A_\wp/\wp A_\wp$ zu dem Punkt $\wp$ betrachten. Sei $A = \mathbb{F}_p[X]$. Beschreibe die Punkte von X und welche Restklassenkörper auftreten können. Wieviele Punkte zu gegebenem Restklassenkörper gibt es?
Hinweis: Zum Zählen der Punkte kann sich die Möbiussche Umkehrformel als hilfreich erweisen.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

a) Sei $Z \subset \mathrm{Spec}(A)$ endlich und U eine offene Umgebung von Z. Zeige, dass ein $f \in A$ existiert mit $Z \subset D(f) \subset U$.

b) Ist $\alpha : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, so ist bekanntlich die induzierte Abbildung $\phi_\alpha : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ stetig. Finde nun Ringe A, B und eine stetige Abbildung $\phi : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$, die nicht auf diese Weise von einem Ringhomomorphismus $\alpha : A \to B$ herkommt.

Abgabe bis spätestens 20. November 2008, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.